AGREGATION DE MATHEMATIQUES

ANALYSE NUMÉRIQUE

INTRODUCTION

Le problème traite de l'approximation d'une fonction analytique au voisinage de zéro, par des fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$. La première partie présente les moyens classiques d'étude du problème. Dans les deuxième et troisième parties, on s'intéresse aux pôles de ces approximants, soit que l'on veuille connaître leur comportement quand on optimise l'ordre d'approximation, soit qu'on veuille étudier le comportement des approximants, quand l'ordre d'approximation est plus faible, mais les pôles fixés.

Dans la quatrième partie, on étudie les approximants de l'exponentielle, où des résultats explicites sont obtenus; enfin dans la dernière partie, la vitesse de convergence des approximants est comparée à celle des sommes partielles de la série, dans le cas d'une série de Stieltjes.

Les parties II, III, IV, V sont, dans une large mesure, indépendantes entre elles.

NOTATIONS

Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est dite de type (p, q) si les degrés de P et Q vérifient : $d^\circ P \leqslant p$ et $d^\circ Q \leqslant q$.

Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ de type (p, q) est un approximant de type-Padé de f au voisinage de zéro (A.T.P.) si :

$$\left(f - \frac{P}{Q}\right)(z) = 0\,(z^{p+1}).$$

On écrira $\left(\frac{P}{Q}\right) = (p/q)_f$.

Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ de type (p, q) est un approximant de Padé de f au voisinage de zéro si ;

$$\left(f - \frac{P}{Q}\right)(z) = 0\,(z^{p+q+1}).$$

On écrira $\frac{P}{Q} = [p/q]_f$.

Si P_n est un polynôme de degré n exactement, on définit $\tilde{P}_n$ par :

$$\tilde{P}_n(t) = t^n P_n(t^{-1}).$$

Un polynôme est dit unitaire si le coefficient du terme de plus haut degré est un.

La notation D_r désigne le disque ouvert, de centre O, de rayon r.

PREMIÈRE PARTIE

On considère une fonction f holomorphe dans un voisinage de zéro, développable à l'origine en série entière de rayon R :

$$f(z) = \sum_{i \geqslant 0} c_i z^i$$

Q.1. Soit Ω un domaine de $\mathbf{C}$, dont le bord $\partial\Omega$ est C^1 différentiable par morceaux. Soit $(x_i)_{i=1,\dots,m}$, m points distincts de Ω, $(m_i)_{i=1,\dots,m}$, m entiers ($m_i \geqslant 1$), et h une fonction holomorphe dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Pour t dans Ω, on pose :

$$n = \sum_{i=1}^{m} m_i ; \qquad V_n(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - x_i)^{m_i} ;$$

$$P(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{V_n(t) - V_n(u)}{t - u} \frac{h(u)}{V_n(u)}\, du.$$

Montrer que P est un polynôme de degré au plus $n - 1$.

Montrer que les dérivées successives de $\frac{V_n(t)}{(t-u)}$, par rapport à t, sont nulles en $t = x_i$ jusqu'à l'ordre $m_i - 1$.

Montrer que P interpole, au sens d'Hermite, h en x_i à l'ordre m_i, pour $i = 1, \dots, m$ (c'est-à-dire $P^{(j)}(x_i) = h^{(j)}(x_i)$ pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 0, \dots, m_i - 1$).

Dans le cas où $m_i = 1$ pour tout i, calculer explicitement l'intégrale ci-dessus et montrer que l'on retrouve ainsi le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Q.2. Pour tout α strictement inférieur à R, on note $\mathcal{H}_\alpha$ l'espace des fonctions holomorphes dans le disque de rayon $\frac{1}{\alpha}$. On définit sur $\mathcal{H}_\alpha$ la fonctionnelle linéaire c associée à f par :

$$c(g) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=r} f(t) \cdot g\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{dt}{t}.$$

Montrer que c est indépendant de r pourvu que $\alpha < r < R$.

Montrer que pour tout $i \geqslant 0$, $c(t^i) = c_i$.

Soit $g_z(t) = \frac{1}{1 - zt}$. Montrer que $c(g_z) = f(z)$ pour tout z tel que $|z| < R$.

Le premier membre $c(g_z)$ sera écrit dans toute la suite, soit pour désigner la série $\sum_{i \geqslant 0} c_i z^i$, soit un prolongement analytique de celle-ci.

Q.3. P_z désigne le polynôme, défini en Q.1., pour la fonction $h = g_z$. Soit W_n le polynôme associé à V_n, défini par :

$$W_n(z) = c\left(\frac{V_n(z) - V_n(t)}{z - t}\right), \qquad (c \text{ agissant sur } t).$$

On suppose que $f(0) \neq 0$. Montrer que W_n est un polynôme de degré $n - 1$.

Montrer que : $c(P_z) = \dfrac{\tilde{W}_n(z)}{\tilde{V}_n(z)}$

$$f(z) - c(P_z) = \frac{z^n}{\tilde{V}_n(z)}\, c\left(\frac{V_n(t)}{1 - zt}\right);$$

$$f(z) - c(P_z) = 0(z^n) \qquad \text{pour } z \text{ voisin de zéro.}$$

En déduire que $\dfrac{\tilde{W}_n}{\tilde{V}_n} = (n - 1/n)_f$.

Q.4. On suppose que $f(z) = z^k f_1(z)$ et $f_1(0) \neq 0$.

Soit $\frac{N}{D}$ un A.T.P. de f_1 de type (p, q).

Montrer que $z^k \dfrac{N(z)}{D(z)}$ est un A.T.P. de f de type $(p + k, q)$.

Tournez la page S. V. P.

Q.5. Un polynôme D, tel que $D(0) \neq 0$, de degré q, étant fixé, montrer que l'A.T.P. de dénominateur D, de type (p, q) existe et est unique quel que soit p.

Donner l'expression des coefficients du numérateur en fonction des coefficients de D et de ceux de la série f.

Q.6. On pose $f_k(x) = \sum_{i \geq 0} c_{i+k}\, x^i$ $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ c_i = 0 \quad i < 0. \end{cases}$

Soit c^k la fonctionnelle associée à f_k.

V_n étant un polynôme arbitraire de degré n exactement, on appelle $(n - 1/n)_{f_k}$ l'A.T.P. de f_k de dénominateur $\tilde{V}_n$.

Soit $\frac{N_{n+k-1}}{\tilde{V}_n}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i\, x^i + x^k\, (n - 1/n)_{f_k}(x)$.

Montrer que $\frac{N_{n+k-1}}{\tilde{V}_n} = (n + k - 1/n)_f$

$$\left(f - \frac{N_{n+k-1}}{\tilde{V}_n}\right)(x) = \frac{x^{n+k}}{\tilde{V}_n(x)}\, c^k\left(\frac{V_n(t)}{1 - x\,t}\right).$$

Q.7. À quelle condition existe-t-il un unique polynôme unitaire V_n de la variable x tel que :

$$\frac{N_{n+k-1}}{\tilde{V}_n} = [n + k - 1/n]_f.$$

Écrire ce polynôme V_n, sous forme d'un rapport de deux déterminants, la dernière ligne du numérateur étant : $(1, x, \ldots, x^n)$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit f une fonction méromorphe dans le disque D_ρ, de rayon ρ non nul, dont les pôles $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ sont simples et non nuls.

On définit une suite de polynômes Q_k, pour $k = 0, \ldots, \nu$:

$$Q_0(x) = 1$$

$$Q_k(x) = \prod_1^k (x - \alpha_i).$$

Pour $n \geq 0$, soit $(a_k^n)_{k=1,\ldots,\nu}$ une suite arbitraire de nombres complexes.

On pose :

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{\nu} a_k^n\, Q_{k-1}(x) + Q_\nu(x).$$

Q.8. Écrire, sous forme intégrale sur un contour Γ à préciser, l'expression de Π_n, unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n + \nu$, qui interpole $(q_n \cdot Q_\nu \cdot f)$ en 0 à l'ordre $n + \nu + 1$.

Q.9. Pour tout n, montrer que Π_n est divisible par Q_ν si et seulement si $(a_k^n)_{k=1,\ldots,\nu}$ vérifient un système linéaire :

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k^n\, c_{jk}^n = d_j^n \qquad j = 1, \ldots, \nu.$$

Préciser les c_{jk}^n (qui sont définis par des intégrales).

Étudier $\lim_{n \to \infty} c_{jk}^n$, et le système linéaire limite quand $n \longrightarrow \infty$.

En déduire que, pour n assez grand, il existe $(a_k^n)_{k=1,\ldots,\nu}$ uniques tels que Π_n soit divisible par Q_ν.

Dans la suite de cette partie, les $(a_k^n)_{k=1,\ldots,\nu}$ sont ceux ainsi définis, n étant supposé assez grand.

Q.10. Montrer que $\lim_{n \to \infty} a_k^n = 0, \quad k = 1, \ldots, \nu$.

Montrer que, uniformément sur tout ensemble borné du plan :

$$\lim_{n \to \infty} q_n(x) = Q_\nu(x).$$

Q.11. Soit $R_n = \frac{\Pi_n}{q_n \cdot Q_\nu}$.

Montrer que R_n est l'approximant de Padé $[n/\nu]_f$ de f.

Q.12. Soit λ et σ vérifiant $\lambda < \sigma < \rho$ et tous les α_i, $i = 1, \ldots, \nu$, appartiennent à D_λ.

Soit K un compact contenu dans $D_\lambda - \{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,\nu}$.

Montrer que $\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\sup_{x \in K} |f(x) - R_n(x)|^{\frac{1}{n}}\right) < \frac{\lambda}{\sigma} < 1$.

En déduire que R_n converge vers f uniformément et géométriquement sur tout compact de $D_\rho - \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu\}$ quand n tend vers l'infini.

Q.13. Montrer que R_n est une fraction irréductible, et a effectivement ν pôles qui approchent les ν pôles de f quand n tend vers l'infini.

TROISIÈME PARTIE

On suppose dans cette partie que f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, distincts, en nombre fini ou non, non nuls, simples.

Les α_i sont supposés rangés en ordre de module croissant, on pose $u_i = \alpha_i^{-1}$, et on suppose de plus qu'il existe ν et σ tels que :

$$|\alpha_\nu| < \sigma < |\alpha_{\nu+1}|.$$

Q.14. Montrer que f peut se mettre sous la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{r_i}{x - \alpha_i} + g(x)$$

où g est une fonction holomorphe dans le disque D_σ.

Si $f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n\, x^n$ et $g(x) = \sum_{n \geq 0} b_n\, x^n$, exprimer c_n en fonction des r_i, u_i, b_n.

Q.15. Soit $\tilde{V}_n$ le polynôme égal au déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{\nu} r_i\, u_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{\nu} r_i\, u_i^{n+\nu+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{\nu} r_i\, u_i^{n+\nu} & \cdots & \sum_{i=1}^{\nu} r_i\, u_i^{n+2\nu} \\ 1 & \cdots & x^\nu \end{vmatrix}$$

Calculer $\tilde{V}_n$, comparer à $\tilde{V}(x) = \prod_{i=1}^{\nu} (x - u_i)$.

Comparer les A.T.P. de f, de dénominateurs respectivement V_n et V.

Tournez la page S. V. P.

Q.16. Soit H_ν^n le polynôme suivant :

$$H_\nu^n(z) = \begin{vmatrix} c_n & \cdots & c_{n+\nu} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ c_{n+\nu-1} & \cdots & c_{n+2\nu-1} \\ 1 & \cdots & z^\nu \end{vmatrix}$$

(Sous les hypothèses faites sur f, ce polynôme est effectivement de degré ν, pour n assez grand, ce que l'on admettra sans démonstration.)

On pose $D_{n\nu} = H_n^\nu - \tilde{V}_n$.

Montrer que pour tout ρ, vérifiant $|u_\nu| > \rho > |u_{\nu+1}|$, et uniformément par rapport à z dans tout compact contenu dans D_ρ :

$$D_{n\nu} = 0(|u_1 \ \ldots \ u_{\nu-1}\rho|^n) \qquad n \longrightarrow +\infty.$$

En déduire que, quand n tend vers l'infini, il existe K_ν indépendant de n tel que :

$$H_\nu^n(z) = K_\nu(u_1 \ \ldots \ u_\nu)^n \left[\prod_{i=1}^{\nu} (z - u_i) + 0\left(\left(\frac{z}{|u_\nu|} \right)^n \right) \right]$$

Q.17. Montrer que si g est un polynôme de degré h :

$$(n + \nu/\nu)_f = [n + \nu/\nu]_f \qquad n \geqslant h.$$

où l'A.T.P. considéré est de dénominateur V.

Q.18. On définit les notations suivantes :

$$(n + \nu - 1/\nu)_f = \frac{W_n}{V_n} \qquad (V_n f - W_n)(z) = \sum_{p \geqslant 0} \beta_p z^p ;$$

$$[n + \nu - 1/\nu]_f = \frac{P_n}{\tilde{H}_\nu^n} \qquad \left(\tilde{H}_\nu^n f - P_n\right) = \sum_{p \geqslant 0} a_p z^p .$$

Montrer que, quand n tend vers l'infini

$$\beta_p = a_p = 0 \qquad p \leqslant n + \nu - 1 ;$$

$$\beta_p = 0(\rho^{(\nu-1)n}) \qquad n + \nu \leqslant p \leqslant n + 2\nu - 1 ;$$

$$\beta_p - a_p = 0(\rho^{(\nu-1)n}) \qquad p \geqslant n + 2\nu .$$

Q.19. On suppose que les pôles α_i ne sont pas connus exactement, mais qu'on connaît pour chaque i, $i = 1, \ldots, \nu$, une suite $(y_{ik})_{k \geqslant 0}$: $\lim_{k \to \infty} y_{ik} = \alpha_i$.

On appelle $Q_k(z) = \prod_{i=1}^{\nu} (z - y_{ik})$ et on pose :

$$\sum_{p \geqslant 0} \beta_p^k z^p = \tilde{Q}_k(z) \cdot f(z).$$

Soient x_i, $i = 1, \ldots, \nu$ les racines de H_ν^n, et $\mu_k = \sup_{i=1,\ldots,\nu} |x_i - y_{ik}|$.

Montrer que $\beta_p^k = a_p + 0(\mu_k) \quad (k \longrightarrow +\infty)$.

QUATRIÈME PARTIE

Q.20. Soit $R(t)$ un polynôme de degré m et $\mathcal{F}(t)$ la fonction suivante :

$$\mathcal{F}(t) = \frac{R(t)}{z} + \frac{R'(t)}{z^2} + \ldots + \frac{R^{(m)}(t)}{z^{m+1}}.$$

Montrer que $\int_{t_0}^{t_1} e^{-zu} R(u)\, du = -\left[e^{-tz} \mathcal{F}(t) \right]_{t_0}^{t_1}$.

Soient $\Phi_0(z) = z^{m+1} \mathcal{F}(0)$ et $\Phi_1(z) = z^{m+1} \mathcal{F}(1)$, montrer que :

$$\Phi_0(z) \cdot e^z - \Phi_1(z) = z^{m+1} e^z \int_0^1 e^{-uz} R(u)\, du.$$

Q.21. Calculer R pour que

$$d^\circ \Phi_0 = q, \qquad d^\circ \Phi_1 = p$$

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_1} = [p/q]_{\exp} \qquad \text{(approximant de Padé de } e^z = \exp(z)\text{)}.$$

Dans les questions 22, 23, 24, on suppose que $q \geqslant p$.

Q.22. Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction de type (p, q) vérifiant $Q(0) \neq 0$.

Montrer que $\frac{P}{Q}$ est un A.T.P. de l'exponentielle si, et seulement si, il existe un polynôme R unique, de degré q tel que :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{p} R^{(q-k)}(1) \cdot z^k ;$$

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{q} R^{(q-k)}(0) \cdot z^k .$$

R est appelé le C-polynôme de l'approximant.

Q.23. Montrer que si $\frac{P}{Q}$, de type (p, q), vérifie :

$$e^z \cdot Q(z) - P(z) = 0(z^{s+1}) \qquad s \geqslant p$$

alors le C-polynôme R vérifie :

a. $p \leqslant s \leqslant q \qquad R^{(q-s)}(x) = (x-1)^{s-p} \hat{R}_p(x) \qquad d^\circ \hat{R}_p = p$

b. $s \geqslant q \qquad R(x) = \frac{d^{s-q}}{dx^{s-q}} \left[x^{s-q} (x-1)^{s-p} \hat{R}_{p+q-s}(x) \right] \qquad d^\circ \hat{R}_{p+q-s} = p + q - s.$

Pour cette dernière démonstration, on pourra considérer la suite I_r :

$$I_0(x) = R(x) \qquad I_{r+1}(x) = \int_0^\infty I_r(u)\, du$$

et calculer I_r, $I_r(0)$, $I_r(1)$.

Q.24. Soit P_n un polynôme de degré n, z un paramètre et τ une constante.

On considère l'équation différentielle E_n :

$$-y'(x) + y(x) = \tau P_n\left(\frac{x}{z}\right).$$

On appelle $y_n(x, z)$ la solution polynôme de E_n et on calcule τ telle que $y_n(0, z) = 1$.

Calculer $y_n(x, z)$ en fonction des coefficients de P_n, et des sommes partielles S_i de l'exponentielle.

Montrer que $y_n(z, z)$ est un approximant de type Padé (n/n) de l'exponentielle. Précisez le C-polynôme de cet approximant.

Déterminer P_n unitaire tel que $y_n(z, z)$ soit l'approximant de Padé $[n/n]$ de l'exponentielle.

Tournez la page S. V. P.

Q.25. Montrer que si $S_n(x)$ est la somme partielle de degré n de $\exp(x)$ et $U_n(x)$ la somme partielle de $\exp(-x)$, $\frac{1}{S_n}$ et U_n sont deux A.T.P. de $\exp(-x)$.

Déterminer les C-polynômes associés respectivement à ces approximants.

Q.26. On pose $g_n(x) = \frac{1}{S_n(x)} - e^{-x} \quad x \in [0, \infty[$.

Montrer que g_n admet un maximum en un point ξ de $]0, \infty[$.

Montrer que $g_n(\xi) \leqslant \frac{1}{2} g_{n-1}(\xi)$.

En déduire que $\sup_{x \in [0, \infty[} \left| \frac{1}{S_n(x)} - e^{-x} \right| < \frac{1}{2^n}$.

CINQUIÈME PARTIE

Dans cette partie f est une fonction analytique dans $C - [1, \infty[$, définie par une série de Stieltjes :

$$f(x) = \sum_{i \geqslant 0} c_i x^i \qquad c_i = \int_0^{+1} u^i w(u)\, du$$

où w est une fonction positive intégrable, telle que $\lim_{n \to \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ existe et vaut 1.

Q.27. Montrer que si c est la fonctionnelle définie en Q.2. :

$$x \in C - [1, \infty[\qquad f(x) = c\left(\frac{1}{1 - xt}\right) = \int_0^{+1} \frac{w(u)}{1 - xu}\, du.$$

En déduire que pour tout polynôme V_k, et pour tout x de $C - [1, \infty[$

$$c\left(\frac{V_k(t)}{1 - xt}\right) = \int_0^{+1} \frac{V_k(u)}{1 - xu}\, w(u)\, du.$$

Q.28. Pour $n \in \mathbb{N}$, et pour toute détermination de la racine carrée, on pose

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\right].$$

Vérifier que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

Quelles sont les racines de T_n ?

Q.29. Soit $T_n^*(x) = T_n(2x - 1)$.

On considère le polynôme P_n, de degré $n - 1$, interpolant la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1 - xt}$ aux racines de T_n^*. Montrer qu'alors, on a, pour $x \in C - [1, \infty[$: $|f(x) - c(P_n)| \leqslant M \frac{\rho^n}{1 - \rho^{2n}} k$

avec $\begin{cases} M \text{ constante} \\ k = k(x) = \sup_{u \in [0, 1]} \left| \frac{1}{1 - xu} \right| \\ \rho = \rho(x) = \inf\left[\left|A + \sqrt{A^2 - 1}\right|, \left|A - \sqrt{A^2 - 1}\right|\right], \quad A = 2x^{-1} - 1. \end{cases}$

Montrer que $\rho < 1$.

En déduire que $c(P_n)$ converge vers f, quand n tend vers l'infini, pour tout x de $C - [1, \infty[$.

Q.30. Soient S_n les sommes partielles de f, de degré n. Montrer que

$$x \in [0, 1[\qquad \lim_{n \to \infty} |f(x) - S_n(x)|^{\frac{1}{n}} = |x|.$$

Étendre ce résultat à tout x complexe de $C - [1, \infty[$.

Q.31. Soit $\varphi(x) = A - \sqrt{A^2 - 1}$ et $A = 2x^{-1} - 1$, la détermination de la racine étant telle que $\sqrt{1 - x} \geqslant 0$ si $x \in [0, 1]$.

Montrer que $\varphi(x) = x^{-1}\left(1 - \sqrt{1 - x}\right)^2$; en déduire que pour tout x de D_1, $\rho(x) < |x|$.

En déduire que dans le disque unité, $c(P_n)$ converge vers f plus vite que S_n, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{c(P_n)(x) - f(x)}{S_n(x) - f(x)} \right| = 0.$$

AGREGATION DE MATHEMATIQUES : MÉCANIQUE GÉNÉRALE

PRÉLIMINAIRES

On indique ici les notations et conventions utilisées, ainsi que quelques résultats que les candidats pourront employer pour la résolution du problème, sans avoir à les démontrer.

1. Une application $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ d'un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}^m$, est dite *différentiable de classe C^∞*, si elle est la restriction à $[a, b]$ d'une application (pas nécessairement unique) $\tilde{\gamma}$, différentiable de classe C^∞, définie sur un intervalle ouvert contenant $[a, b]$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, la dérivée d'ordre k de $\tilde{\gamma}$ au point a (resp. au point b), ne dépend que de γ, et non du choix de $\tilde{\gamma}$: c'est la dérivée d'ordre k à *droite* (resp. à *gauche*) de γ en a (resp. en b); (par convention, on l'appellera simplement dérivée d'ordre k de γ en a (resp. en b)).

2. Dans toute la suite, « différentiable » sous-entendra toujours « de classe C^∞ ».

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{2m}$ (coordonnées $(x, \dot{x}) = (x^1, \ldots, x^m, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^m)$), et $\mathcal{L} : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable, qu'on notera $\mathcal{L}(x, \dot{x})$, ou $\mathcal{L}(x^1, \ldots, x^m, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^m)$.

On désigne par Γ_U l'ensemble des applications différentiables $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, définies sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, telles que pour tout $t \in [a, b]$, $\left(\gamma(t), \dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)\right)$ soit élément de U.

À tout élément γ de Γ_U on associe l'intégrale :

$$I(\gamma) = \int_a^{+b} \mathcal{L}\left(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\right) dt.$$

On dit que cette formule définit une fonctionnelle I sur Γ_U.

4. On aura à considérer dans la suite des familles, dépendant différentiablement d'un paramètre réel s, d'applications différentiables $\gamma_s : [a_s, b_s] \to \mathbb{R}^m$, éléments de Γ_U, l'intervalle $[a_s, b_s]$ pouvant lui-même dépendre de s. Une telle famille d'applications sera toujours supposée définie par les données suivantes :

— deux applications différentiables $s \longmapsto a(s) = a_s$, $s \longmapsto b(s) = b_s$, définies sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant pour tout $s \in J$, $a(s) \leqslant b(s)$;

— une application différentiable $\hat{\gamma} : W \to \mathbb{R}^m$, définie sur un ouvert W de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, notée $(s, t) \longmapsto \hat{\gamma}(s, t)$, telle que pour tout $s \in J$ et tout $t \in [a_s, b_s]$, (s, t) soit élément de W, et que l'on ait :

$$\hat{\gamma}(s, t) = \gamma_s(t).$$

On a donc, en dérivant par rapport à t :

$$\dot{\gamma}_s(t) = \frac{d\gamma_s}{dt}(t) = \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t}(s, t).$$

Tournez la page S. V. P.

5. Avec les notations précisées ci-dessus, l'application de J dans $\mathbb{R}$: $s \longrightarrow I(\gamma_s)$ est différentiable, et sa dérivée est donnée par l'expression

$$\frac{d}{ds} I(\gamma_s) = \left[\mathcal{L}\left(\gamma_s(b_s), \dot{\gamma}_s(b_s)\right) - \sum_{i=1}^{m} \dot{\gamma}_s^i(b_s) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(b_s), \dot{\gamma}_s(b_s)\right) \right] \frac{d b_s}{ds}$$

$$- \left[\mathcal{L}\left(\gamma_s(a_s), \dot{\gamma}_s(a_s)\right) - \sum_{i=1}^{m} \dot{\gamma}_s^i(a_s) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(a_s), \dot{\gamma}_s(a_s)\right) \right] \frac{d a_s}{ds}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(b_s), \dot{\gamma}_s(b_s)\right) \frac{d}{ds}\left(\gamma_s^i(b_s)\right)$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(a_s), \dot{\gamma}_s(a_s)\right) \frac{d}{ds}\left(\gamma_s^i(a_s)\right)$$

$$+ \int_{a(s)}^{b(s)} \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right) \right) \right) \frac{\partial \hat{\gamma}^i}{\partial s}(s, t) \right] dt .$$

Dans l'expression ci-dessus, on a noté $\gamma_s^i(t)$, $\hat{\gamma}^i(s, t)$, $\dot{\gamma}_s^i(t)$, $(1 \leqslant i \leqslant m)$ les composantes, respectivement, de $\gamma_s(t)$, $\hat{\gamma}(s, t)$, $\dot{\gamma}_s(t) = \dfrac{d \gamma_s}{dt}(t)$.

Les symboles $\dfrac{d}{ds}$ et $\dfrac{d}{dt}$ désignent les dérivées totales, respectivement par rapport à s et à t. Ainsi par exemple :

$$\frac{d}{ds}\left(\gamma_s^i(b_s)\right) = \frac{\partial \hat{\gamma}^i}{\partial s}(s, b_s) + \frac{\partial \hat{\gamma}^i}{\partial t}(s, b_s) \frac{d b_s}{ds} ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right) \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^j \partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right) \dot{\gamma}_s^j(t) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right) \ddot{\gamma}_s^j(t) \right),$$

avec :

$$\ddot{\gamma}_s^j(t) = \frac{d^2 \gamma_s^j(t)}{dt^2} = \frac{\partial^2 \hat{\gamma}^j}{\partial t^2}(s, t) .$$

6. Soit A un sous-ensemble de Γ_U. On dit qu'un élément γ de A est une *extrémale* de la fonctionnelle I *sur l'ensemble d'applications A* si, pour toute famille d'éléments γ_s de A dépendant différentiablement d'un paramètre réel s (au sens précisé au point 4 ci-dessus), et vérifiant $\gamma_{s_0} = \gamma$ (s_0 étant un élément particulier de l'intervalle de définition de s), on a :

$$\frac{d}{ds} I(\gamma_s)\Big|_{s = s_0} = 0 .$$

On remarquera que la propriété de γ, d'être une extrémale de I sur A, *dépend du choix de A*.

7. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. On suppose que pour toute fonction différentiable $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, vérifiant $\varphi(a) = \varphi(b)$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b)$, l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)\, \varphi(t)\, dt$$

est nulle. Alors f est identiquement nulle.

On considère un système mécanique dont l'*état cinétique* (ensemble des positions et des vitesses des constituants du système) est repéré par un point $(q, p) = (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$. L'ensemble des états cinétiques possibles, appelé *espace des phases* du système, est un ouvert P de $\mathbb{R}^{2n}$. Les coordonnées $q^1, \ldots, q^n$, appelées *variables de position*, décrivent la position du système, et les coordonnées $p_1, \ldots, p_n$, appelées *variables d'impulsion*, décrivent les vitesses des constituants du système (pour une position donnée, la répartition des masses des constituants du système étant supposée donnée).

Les propriétés dynamiques du système sont déterminées par la donnée d'une fonction différentiable $H : P \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, appelée *hamiltonien* du système. Les équations du mouvement, appelées équations de Hamilton, ou équations canoniques, s'écrivent :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d q^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{d p_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}, \end{cases} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

la variable t désignant le temps. Un *mouvement* du système est une courbe intégrale $t \longrightarrow \left(q(t), p(t)\right)$ des équations canoniques (1), définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Un mouvement du système est dit périodique de période T (avec T réel, $T > 0$), s'il est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et vérifie :

$$q^i(t + T) = q^i(t) ; \quad p_i(t + T) = p_i(t) ; \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

PREMIÈRE PARTIE

Pour toute application différentiable $\gamma : [a, b] \to P$ d'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ dans P, on pose :

$$(2) \qquad I(\gamma) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \frac{d q^i(t)}{dt} - H\left(\gamma(t)\right) \right] dt ,$$

$$(3) \qquad J(\gamma) = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(p_i(t) \frac{d q^i(t)}{dt} - q^i(t) \frac{d p_i(t)}{dt} \right) - H\left(\gamma(t)\right) \right] dt ,$$

où on a écrit $p_i(t)$ pour $p_i\left(\gamma(t)\right)$, et $q^i(t)$ pour $q^i\left(\gamma(t)\right)$, afin d'alléger les notations.

1° Montrer qu'on a :

$$I(\gamma) - J(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(p_i(b)\, q^i(b) - p_i(a)\, q^i(a) \right).$$

2° Soit un réel $T > 0$. Dans la présente question, le sous-ensemble A de Γ_U considéré au point 6 des Préliminaires est l'ensemble des applications différentiables de [0, T] dans P, qui vérifient :

$$\gamma(0) = \gamma(T) , \qquad \frac{d^k \gamma(0)}{dt^k} = \frac{d^k \gamma(T)}{dt^k} \quad \text{pour tout entier } k \geqslant 1 .$$

Montrer que A s'identifie à l'ensemble des applications différentiables γ de $\mathbb{R}$ entier dans P, périodiques de période T, c'est-à-dire vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t + T) = \gamma(t)$.

Montrer qu'une application différentiable $\gamma : \mathbb{R} \to P$, périodique de période T, est un mouvement du système mécanique étudié (c'est-à-dire est une courbe intégrale des équations canoniques (1)), si et seulement si sa restriction à [0, T] est une extrémale de I (ou de J), sur l'ensemble d'applications A, au sens précisé au point 6 des Préliminaires.

Tournez la page S. V. P.

3° On va appliquer le résultat ci-dessus au cas où le système mécanique considéré est un oscillateur harmonique à une dimension (point matériel M de masse $m > 0$, mobile sur une droite fixe, attiré par un point fixe O situé sur cette droite, la force attractive étant proportionnelle à la distance $|\overrightarrow{OM}|$). L'espace des phases est donc $\mathbb{R}^2$ (coordonnées q, p), et le hamiltonien H a pour expression :

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + kq^2 \qquad (k \text{ étant une constante} > 0).$$

a. Soit un réel $T > 0$, et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application différentiable, périodique de période T, de la forme :

$$q(t) = Q\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right), \quad p(t) = P\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \beta\right),$$

où P, Q, α et β sont des constantes.

Calculer $I(\gamma)$ (l'intervalle $[a, b]$ étant, dans le cas présent, $[0, T]$).

b. En prenant P, Q, α et β pour paramètres, montrer que si γ est un mouvement du système, on a nécessairement :

— ou bien $P = 0$, $Q = 0$, T quelconque;

— ou bien $PQ \neq 0$, $T = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$, et $p(t) = m\frac{dq(t)}{dt}$.

c. Vérifier que les conditions nécessaires pour que γ soit un mouvement du système, trouvées en *b* ci-dessus, sont aussi suffisantes.

DEUXIÈME PARTIE

On va appliquer le résultat de la question 2° de la première partie à la recherche de certaines solutions stationnaires du problème plan des trois corps. Le système mécanique considéré est constitué de trois points matériels M_1, M_2, M_3, de masses respectives m_1, m_2, m_3 strictement positives, librement mobiles dans le plan $\mathbb{R}^2$, s'attirant deux à deux suivant la loi de Newton (force exercée par M_j sur M_i parallèle au vecteur $\overrightarrow{M_iM_j}$, de même sens, proportionnelle à $\frac{m_im_j}{|\overrightarrow{M_iM_j}|^2}$).

On note $\vec{q_i} = \overrightarrow{OM_i}$, et $\vec{p_i}$ le vecteur impulsion du point matériel M_i.

L'espace des phases P est l'ouvert de $\mathbb{R}^{12}$:

$$P = \left\{(\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3}, \vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}) \;;\; \vec{q_i} \in \mathbb{R}^2, \vec{p_i} \in \mathbb{R}^2, \vec{q_i} \neq \vec{q_j} \text{ si } i \neq j, \; 1 \leqslant i, j \leqslant 3\right\}.$$

Le hamiltonien H du système a pour expression (K étant une constante > 0) :

$$H(\vec{q_i}, \vec{p_i}) = \sum_{i=1}^{3}\frac{|\vec{p_i}|^2}{2m_i} - K\left(\frac{m_1m_2}{|\vec{q_1} - \vec{q_2}|} + \frac{m_2m_3}{|\vec{q_2} - \vec{q_3}|} + \frac{m_3m_1}{|\vec{q_3} - \vec{q_1}|}\right).$$

On recherche les mouvements du système pour lesquels les vecteurs $\vec{q_i}$, $\vec{p_i}$, $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ sont de module constant, et tournent, dans le plan $\mathbb{R}^2$, à une vitesse angulaire constante ω (la même pour ces six vecteurs).

Pour effectuer les calculs, il pourra être commode d'identifier $\mathbb{R}^2$ au plan complexe C, en associant à chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'élément $x + iy$ de C. Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de module constant, qui tourne à la vitesse angulaire ω constante, est alors représenté par une famille de complexes, dépendant du temps t, de la forme $(x_0 + iy_0)e^{i\omega t}$.

1° En identifiant $\mathbb{R}^2$ à C comme indiqué ci-dessus, on fait correspondre aux vecteurs $\vec{q_k}$ et $\vec{p_k}$ de $\mathbb{R}^2$, des éléments de C, notés respectivement z_k et ξ_k, $(k = 1, 2, 3)$.

a. Exprimer le hamiltonien H au moyen des z_k, ξ_k, $(k = 1, 2, 3)$.

b. Exprimer la fonctionnelle $I(\gamma)$ définie par la formule (2) au moyen des fonctions $t \longrightarrow z_k(t)$, $t \longrightarrow \xi_k(t)$, $(t \in [a, b]$, $k = 1, 2, 3)$.

2° Soit un réel $T > 0$, et $\gamma : \mathbb{R} \to P$ une application différentiable périodique de période T, définie par les formules :

$$z_k(t) = Q_k e^{i\omega t}; \quad \xi_k(t) = P_k(t)e^{i\omega t}, \tag{4}$$

avec Q_k et $P_k \in C$, constantes $(k = 1, 2, 3)$, et $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Calculer $I(\gamma)$, l'intervalle $[a, b]$ étant, dans le cas présent, $[0, T]$.

Dans les questions 3° à 6° ci-dessous, on suppose que l'application γ, définie par les formules (4), est un mouvement du système mécanique étudié. En utilisant le résultat obtenu dans la première partie, question 2°, on va établir diverses relations que doivent nécessairement vérifier Q_k et P_k $(k = 1, 2, 3)$.

3° Montrer qu'on a nécessairement :

$$P_k = im_k\omega Q_k, \qquad (k = 1, 2, 3); \tag{5}$$

$$m_1Q_1 + m_2Q_2 + m_3Q_3 = 0. \tag{6}$$

[Pour établir chacune de ces relations, on pourra supposer que les P_k et Q_k sont des fonctions différentiables d'un paramètre réel s, d'une forme que l'on précisera ; on pourra alors considérer γ comme dépendant différentiablement du paramètre s, et utiliser le résultat de la question 2° de la première partie.]

Quelles sont les significations mécaniques des relations (5) et (6)?

4° On pose :

$$Q_k = r_k e^{i\theta_k}, \quad r_k \geqslant 0, \qquad (k = 1, 2, 3);$$

$$|Q_1 - Q_2| = r_{12}; \quad |Q_2 - Q_3| = r_{23}; \quad |Q_3 - Q_1| = r_{31}.$$

a. Montrer qu'on a :

$$r_1\left(\frac{m_2r_3}{r_{12}^3}\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m_3r_2}{r_{31}^3}\sin(\theta_1 - \theta_3)\right) = 0,$$

ainsi que deux relations analogues, obtenues à partir de celle-ci par permutation circulaire des indices 1, 2 et 3. [On pourra considérer successivement chaque θ_k comme un paramètre dont dépend γ.]

b. Montrer qu'on a :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2)\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}} + \frac{m_3m_1}{r_{31}}\right)^{-1}.$$

[On pourra remplacer r_k par λr_k, $(k = 1, 2, 3)$, avec $\lambda > 0$, et considérer λ comme un paramètre dont dépend γ.]

5° On suppose les trois points matériels M_1, M_2, M_3 non alignés. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral, c'est-à-dire qu'on a :

$$r_{12} = r_{23} = r_{31}.$$

On pose $r = r_{12} = r_{23} = r_{31}$. Exprimer la période T au moyen de K, r et $(m_1 + m_2 + m_3)$.

Tournez la page S. V. P.

6° On suppose les trois points matériels M_1, M_2, M_3 alignés, et, par exemple, M_2 situé entre M_1 et M_3.

a. Montrer que l'origine O est située sur le segment de droite M_1M_3 (extrémités non comprises).

Dans la suite de cette question, on oriente la droite M_1M_3 de M_1 vers M_3, et on note x_1, x_2, x_3 les abscisses des points M_1, M_2, M_3 (à partir de l'origine O). On remarquera qu'avec les conventions faites, on a $x_1 < 0 < x_3$ et $x_1 < x_2 < x_3$.

b. Montrer qu'on a la double égalité :

$$\frac{4\pi^2 a^3}{KT^2 (m_1 + m_2 + m_3)} = \left(\frac{m_3}{\lambda^2} + m_2\right)(m_2\lambda + m_3)^{-1} = \left(m_1 + \frac{m_2}{(1-\lambda)^2}\right)\left(m_1 + m_2(1-\lambda)\right)^{-1},$$

où on a posé :

$$x_2 - x_1 = a, \qquad x_3 - x_1 = \lambda a.$$

c. Les masses m_1, m_2, m_3, strictement positives, étant données, montrer qu'il existe un élément unique λ de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tel que la seconde égalité ci-dessus soit vérifiée.

7° On a établi ci-dessus (question 5° lorsque les trois points matériels ne sont pas alignés, et question 6° lorsque ces trois points sont alignés) des conditions nécessaires pour que γ soit un mouvement du système mécanique étudié. Vérifier que ces conditions sont suffisantes.

TROISIÈME PARTIE

On revient à l'étude d'un système mécanique général, dont l'évolution est régie par les équations de Hamilton (1). On considère une famille de mouvements périodiques γ_s du système, dépendant différentiablement du paramètre réel s ($s \in J$, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$), au sens indiqué au point 4 des Préliminaires. La période $T(s) = b_s - a_s$ du mouvement périodique γ_s est une fonction différentiable de s. On rappelle que le hamiltonien H du système garde une valeur constante au cours de chaque mouvement (intégrale première de l'énergie); on notera $h(s)$ la valeur de H au cours du mouvement γ_s. On notera $I(\gamma_s)$ la valeur de la fonctionnelle I, donnée par la formule (2), pour $\gamma = \gamma_s$, $a = a_s$, $b = b_s$.

1° Soient s_1 et s_2 deux éléments de l'intervalle J, et Ω la partie du plan $\mathbb{R}^2$ (coordonnées s, t) définie par :

$$\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s_1 \leqslant s \leqslant s_2, \quad a_s \leqslant t \leqslant b_s\}.$$

En utilisant la formule de Stokes pour transformer une intégrale calculée sur le contour de Ω, en intégrale double dans Ω, montrer qu'on a :

$$I(\gamma_{s_2}) - I(\gamma_{s_1}) = -\int_{s_1}^{s_2} h(s)\,\frac{dT(s)}{ds}\,ds.$$

2° Retrouver ce résultat en utilisant la formule indiquée au point 5 des Préliminaires.

3° En déduire que si les mouvements périodiques γ_s ont tous même énergie (c'est-à-dire si $h(s)$ ne dépend pas de s), la valeur de la fonctionnelle :

$$K(\gamma_s) = \int_{a_s}^{b_s}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\left(\gamma_s(t)\right)\frac{dq^k}{dt}\left(\gamma_s(t)\right)\right)dt$$

$$= I(\gamma_s) + h(s)\,T(s)$$

ne dépend pas de s.

4° On suppose que tous les mouvements du système mécanique étudié sont périodiques, et qu'il existe une fonction différentiable T, appelée *fonction période*, définie sur l'espace des phases P et à valeurs strictement positives, telle que pour tout point (q_0, p_0) de P, $T(q_0, p_0)$ soit une période du mouvement périodique défini par la donnée de Cauchy :

(7) $$(q, p) = (q_0, p_0) \qquad \text{pour } t = 0.$$

On définit sur P une fonction K en posant :

$$K(q_0, p_0) = \int_0^{T(q_0, p_0)}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k(t)\,\frac{dq^k(t)}{dt}\right)dt,$$

où $t \longmapsto \left(q(t), p(t)\right)$ est le mouvement périodique du système défini par la donnée de Cauchy (7).

a. Soit $s \longmapsto (q_{s0}, p_{s0})$ une application différentiable d'un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ dans P. Pour tout $s \in J$, on note $t \longmapsto \gamma_s(t) = \left(q_s(t), p_s(t)\right)$ le mouvement du système qui vérifie la donnée de Cauchy :

$$(q_s, p_s) = (q_{s0}, p_{s0}) \qquad \text{pour } t = 0.$$

On admettra que l'application de $J \times \mathbb{R}$ dans P : $(s, t) \longmapsto \gamma_s(t)$, est différentiable.

En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que la fonction $s \longmapsto K(q_{s0}, p_{s0})$ est différentiable et a pour dérivée :

$$\frac{dK}{ds}(q_{s0}, p_{s0}) = T(q_{s0}, p_{s0})\,\frac{dH}{ds}(q_{s0}, p_{s0}).$$

b. En déduire que K est différentiable, et que sa différentielle vérifie :

$$dK = T\,dH$$

c. On admettra que la relation ci-dessus *implique que tout point de* P *où* d H est non nulle possède un voisinage U sur lequel la fonction K peut s'exprimer sous la forme :

$$K = \tilde{K} \circ H,$$

où $\tilde{K}$ est une fonction différentiable, définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$. En d'autres termes, la valeur prise par K en un point de U n'est fonction que de la valeur h prise par H en ce point, et si on note $\tilde{K}(h)$ cette valeur prise par K, la fonction $h \longmapsto \tilde{K}(h)$ est différentiable. Montrer qu'on a sur U :

$$T = \frac{d\tilde{K}}{dh} \circ H,$$

donc que la valeur prise par T en un point de U, n'est fonction que de la valeur prise par H en ce point.

5° Le système mécanique étudié dans cette question est l'oscillateur harmonique, considéré dans la première partie, question 3°. Vérifier que tous les mouvements sont périodiques. Déterminer les fonctions K et T, et vérifier les conclusions de la question 4°.

6° Traiter, comme dans la question précédente, le cas où le système mécanique considéré est le système de Képler (point matériel soumis à une force attractive dirigée vers l'origine, inversement proportionnelle au carré de la distance à l'origine). On restreindra l'espace des phases afin que tous les mouvements soient périodiques.

AGREGATION DE MATHEMATIQUES

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

COMMENTAIRES

Bien que les trois parties du problème puissent, pour l'essentiel, être traitées séparément, il est conseillé de les traiter dans l'ordre de l'énoncé.

NOTATIONS

Dans tout le problème, P (Θ) désigne la probabilité d'un événement Θ. Si (Ω, E, P) est un espace de probabilité, on dira que l'espace de probabilité (Ω', E', P') est un espace de probabilité *agrandi* à partir de (Ω, E, P), si Ω ⊂ Ω', E ⊂ E', et si la restriction $P'_{|E}$ de la probabilité P' à E coïncide avec P. On notera alors P' = P par abus de langage.

On désignera respectivement par E (X) et V (X) l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X. La loi de probabilité (ou la distribution) de X sera désignée par L (X).

Le logarithme népérien de x est noté ln x. On pose de même ln ln x = ln (ln x).

PREMIÈRE PARTIE

Soient U et V deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. On définit la *distance en variation* entre les lois L (U) de U et L (V) de V par :

$$d(L(U), L(V)) = \sup_{D \subset \mathbb{N}} | P(U \in D) - P(V \in D) |$$

On note A, B, C la partition de N définie par :

$$A = \{ k : k \in \mathbb{N},\ P(U = k) < P(V = k) \}$$
$$B = \{ k : k \in \mathbb{N},\ P(U = k) = P(V = k) \}$$
$$C = \{ k : k \in \mathbb{N},\ P(U = k) > P(V = k) \}$$

1° Établir les *identités* :

$$d(L(U), L(V)) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} | P(U = k) - P(V = k) | = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min \{ P(U = k), P(V = k) \}$$

2° On suppose que U et V sont définies simultanément sur le même espace de probabilités. Montrer que :

$$d(L(U), L(V)) \leqslant P(U \neq V)$$

3° On pose :

$$p_{kk} = \min \{ P(U = k), P(V = k) \}, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$p_{kl} = 0 \quad \text{si} \quad k \neq l, \quad \text{avec} \quad (k, l) \in (A \times \mathbb{N}) \cup (B \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times B) \cup (\mathbb{N} \times C)$$

a. Soient deux mesures de probabilités P' sur $\Omega' = \{1, \dots, I\}$, et P'' sur $\Omega'' = \{1, \dots, J\}$. On pose :

$$P_i = P'(i), \quad Q_j = P''(j), \quad \text{et} \quad R_{ij} = P_i Q_j,$$
$$1 \leqslant i \leqslant I, \quad 1 \leqslant j \leqslant J.$$

Vérifier que $R(i, j) = R_{ij}$ définit une mesure de probabilité sur l'ensemble produit $\Omega' \times \Omega''$, de marges P' et P''.

b. Montrer qu'il est possible de définir p_{kl} pour $k \neq l$ avec $(k, l) \in (C \times A)$, de manière que :

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{+\infty} p_{kj} = P(U = k)$,

— pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{+\infty} p_{il} = P(V = l)$,

— pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$, $p_{kl} \geqslant 0$.

c. En déduire qu'il existe toujours un espace de probabilité sur lequel U et V, de lois L (U) et L (V) données, sont définies simultanément, de manière que :

$$d(L(U), L(V)) = P(U \neq V)$$

On dira d'une loi jointe de U et V satisfaisant l'égalité ci-dessus qu'elle définit un *couplage maximal de* U et V.

4° On considère dans cette question le cas particulier où :

— la loi L (U) de U est une loi de Bernoulli :

$$P(U = 1) = 1 - P(U = 0) = p \in (0, 1)$$

où en général on désigne par (α, β) l'intervalle ouvert d'extrémités α et β.

— la loi L (V) de V est une loi de Poisson d'espérance $E(V) = p \in (0, 1)$:

$$P(V = r) = \frac{p^r}{r!} e^{-p}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

a. Évaluer $d(L(U), L(V))$ en fonction de p. On exprimera le résultat par une expression ne faisant intervenir ni sommation infinie, ni valeur absolue, et exprimée en fonction de p et e^{-p}.

b. Montrer qu'il est possible de définir simultanément U et V sur le même espace de probabilités, jointement à une variable aléatoire W, de manière que U et W soient indépendants et que V = WU. Déterminer la loi de W et prouver qu'une telle construction établit un couplage maximal de U et V.

5° On considère maintenant une suite $X_1, X_2, \dots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli, telles que, pour $i = 1, 2, \dots, n$,

$$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p_i \in (0, 1)$$

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Parallèlement, on considère une suite $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ de variables aléatoires indépendantes de Poisson, telles que, pour $i = 1, 2, \dots, n$,

$$P(Y_i = r) = \frac{p_i^r}{r!} e^{-p_i}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

On pose $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$.

a. Quelle est la distribution de T_n ?

Tournez la page S. V. P.

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie, on considère une suite $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $(0, 1)$.

1° Montrer qu'avec probabilité un, pour tout $n = 2, 3, \ldots$, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont distincts. En déduire que la statistique ordonnée :

$$\omega_{1,n} < \omega_{2,n} < \ldots < \omega_{n,n}$$

obtenue en rangeant $\omega_1, \ldots, \omega_n$ par ordre croissant, est définie de manière unique presque sûrement.

2° Soit $t \in (0, 1)$ fixé, et soit $D_n(t)$ le nombre de variables parmi $\omega_1, \ldots, \omega_n$, inférieures ou égales à t.

a. Pour $i = 0, 1, \ldots, n$, déterminer $P(D_n(t) = i)$.

b. En déduire, pour $i = 1, \ldots, n$, $P(\omega_{i,n} \leqslant t)$.

c. Montrer que cette probabilité peut s'écrire sous la forme :

$$P(\omega_{i,n} \leqslant t) = \frac{1}{\beta(u, v)} \int_0^t x^{u-1} (1 - x)^{v-1} \, dx \qquad t \in (0, 1)$$

où :

$$\beta(u, v) = \int_0^1 x^{u-1} (1 - x)^{v-1} \, dx$$

et où u et v sont des paramètres dont on précisera les valeurs, en fonction de i et n. On admettra que, pour j, k entiers,

$$\beta(j, k) = (k - 1)\,!\,(j - 1)\,!\,/\,(k + j - 1)\,!.$$

3° *a.* Montrer que, pour tout $n = 1, 2, \ldots$, l'identité :

$$\omega_i = \omega_{r_{i,n},n} \qquad , \qquad i = 1, \ldots, n$$

définit presque sûrement une permutation $r = \{r_{1,n}, \ldots, r_{n,n}\}$ de $\{1, \ldots, n\}$.

b. Vérifier que, pour $r = \{r_{1,n}, \ldots, r_{n,n}\}$ donné, la correspondance entre $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et $\{\omega_{1,n}, \ldots, \omega_{n,n}\}$ est biunivoque et de jacobien unité si $\omega_{1,n} < \ldots < \omega_{n,n}$.

En déduire que la densité jointe de $\{\omega_{1,n}, \ldots, \omega_{n,n}\}$ est $n!$ sur l'ensemble $\{(x_1, \ldots, x_n) : 0 < x_1 < \ldots < x_n < 1\}$.

c. En déduire que $r = \{r_{1,n}, \ldots, r_{n,n}\}$ est indépendant de $\{\omega_{1,n}, \ldots, \omega_{n,n}\}$ et équidistribué sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

4° On pose désormais $R(n) = r_{n,n}$, c'est-à-dire $R(1) = 1$ et, pour $n \geqslant 2$:

$$R(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_n < \omega_{1,n-1}, \\ i & \text{si } \omega_{i-1,n-1} < \omega_n < \omega_{i,n-1}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n-1, \\ n & \text{si } \omega_n > \omega_{n-1,n-1}. \end{cases}$$

a. Montrer que la suite $\{R(n), n \geqslant 1\}$ est définie presque sûrement.

b. Déterminer la probabilité conditionnelle $P(R(n) \leqslant i \mid \omega_{i,n-1} = t)$.

En déduire $P(R(n) \leqslant i)$, puis $P(R(n) = i)$, $i = 1, \ldots, n$. Montrer que :

$$P(R(n) = n) = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

c. Montrer que la suite $\{R(n), n \geqslant 1\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

5° Pour $n = 2, 3, \ldots$, on pose $X_n = 1$ si $\omega_n \geqslant \max\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$ et $X_n = 0$ autrement. On pose $X_1 = 1$. Lorsque $X_n = 1$, on dit que ω_n est un *record* (sous-entendu de la suite $\omega_1, \omega_2, \ldots$), et que l'indice n correspondant est un *temps de record*.

a. Soit $N(n, kn) = \sum_{i=n+1}^{kn} X_i$ le nombre de records observés dans l'intervalle $i \in \{n + 1, \ldots, kn\}$. En se servant des résultats de la première et de la deuxième partie, évaluer la loi limite de $N(n, kn)$ lorsque n tend vers l'infini. En particulier, déterminer :

$$\lim_{n \to \infty} P(N(n, kn) = r), \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

NOTA BENE : k est ici un nombre entier fixé.

b. Établir les inégalités, pour $0 < \theta < N$,

$$\frac{\theta^N}{N!} e^{-\theta} \leqslant \sum_{r=N}^{+\infty} \frac{\theta^r}{r!} e^{-\theta} \leqslant \frac{\theta^N}{N!} e^{-\theta} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\theta}{N}} \right\}$$

c. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe presque sûrement un indice n_ε tel que $n \geqslant n_\varepsilon$ implique (pour $k \geqslant 2$, fixé à l'avance) :

$$N(n, kn) \leqslant \frac{(1 + \varepsilon) \ln n}{\ln \ln n}.$$

Indications : On rappelle la formule de Stirling :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \, (1 + o(1)), \quad n \to \infty$$

On pourra faire usage des résultats du 3° de la deuxième partie.

6° On utilise dans cette question la suite $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ construite au 4°, *b* de la deuxième partie, ainsi que les notations introduites dans cette question. On supposera par la suite que $k \geqslant 3$ est fixé.

a. On donne les évaluations numériques suivantes :

$$0{,}577 < \gamma < 0{,}578, \quad 1{,}098 < \ln 3 < 1{,}099,$$
$$0{,}693 < \ln 2 < 0{,}694$$

Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$,

$$1 \leqslant \liminf_{n \to \infty} \{ l(kn) - l(n) \} \leqslant \limsup_{n \to \infty} \{ l(kn) - l(n) \} \leqslant [\ln k] + 1$$

b. On pose, pour $K \geqslant 1$, $\tau_n = \sum_{i=n+1}^{n+K} Z_i$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Montrer que, indépendamment de $K \geqslant 1$ fixé,

$$\limsup_{n \to \infty} \left\{ \frac{\ln \ln n}{\ln n} \right\} \tau_n = 1 \text{ presque sûrement.}$$

c. En déduire que, pour tout $k \geqslant 3$ fixé,

$$\limsup_{n \to \infty} \left\{ \frac{\ln \ln n}{\ln n} \right\} N(n, kn) = 1 \text{ presque sûrement.}$$

d. Comment pourrait-on montrer que le résultat ci-dessus reste valable pour $k = 2$?

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

(AGREGATION DE MATHEMATIQUES)

PRÉLIMINAIRES

Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé et la numérotation des questions.

Le but du problème est d'étudier les ensembles de mots définis par certaines propriétés de leurs sous-mots. Dans la première partie, on établit quelques résultats élémentaires sur les monoïdes reconnaissant un langage. La deuxième partie décrit un algorithme pour construire un automate reconnaissant l'ensemble des sous-mots d'un mot donné. On caractérise les langages reconnus par un monoïde ordonné dans les parties III et IV et ceux reconnus par un p-groupe dans la partie V. La partie II est indépendante du reste du problème et la partie V est indépendante des parties III et IV.

RAPPELS ET DÉFINITIONS GÉNÉRALES

Relations.

On appelle *relation de préordre* une relation réflexive et transitive. Si $\leqslant$ est une relation de préordre, la relation $\sim$ définie par $x \sim y$ si et seulement si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ est une relation d'équivalence, appelée *relation d'équivalence associée à* $\leqslant$.

Monoïdes.

On appelle *monoïde* un ensemble M muni d'une loi de composition interne $(x, y) \to xy$, associative et admettant un élément neutre, noté 1. Soit x un élément de M. On pose $x^0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $x^{n+1} = x^n x$.

Soit M un monoïde. Un *sous-monoïde* de M est une partie N de M contenant 1 et telle que si $x, y \in N$ alors $xy \in N$.

Soient M et N deux monoïdes. Une application φ de M dans N est un *morphisme de monoïdes* si $\varphi(1) = 1$ et si, pour tout x, y dans M, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Si de plus φ est surjectif, on dit que N est un *quotient* de M. Si φ est bijectif on dit que φ est un *isomorphisme.*

Soient M_1 et M_2 deux monoïdes. Le produit cartésien $M_1 \times M_2$, muni de la loi de composition interne $(m_1, m_2)(n_1, n_2) = (m_1 n_1, m_2 n_2)$ est un monoïde, appelé *produit* de M_1 et M_2.

On appelle *congruence* sur un monoïde M une relation d'équivalence R sur M telle que pour tout x, y, z dans M, x R y entraîne xz R yz et zx R zy. On appelle *index de la congruence* le cardinal de l'ensemble quotient M/R.

Monoïde libre.

Soit A un ensemble fini appelé *alphabet*. On note A^* l'ensemble des mots sur l'alphabet A. On appelle *lettres* les éléments de A, et on note 1 le mot vide. Tout mot s'écrit de façon unique sous la forme $u = a_1 a_2 \dots a_n$ avec $n \geqslant 0$ et où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des lettres.

Le produit des mots $a_1 a_2 \dots a_n$ et $b_1 b_2 \dots b_m$ est le mot $a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$. Muni de cette loi de composition, A^* est un monoïde. On admettra la propriété « universelle » suivante :

> « toute application φ de A dans un monoïde M se prolonge de façon unique en un morphisme de monoïdes de A^* dans M. Ce prolongement est défini par les formules $\varphi(1) = 1$ et, pour tout mot non vide $u = a_1 \dots a_n$, par $\varphi(u) = \varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)$. »

Mots.

On dit qu'un mot u est *facteur* d'un mot v s'il existe des mots x et y (éventuellement vides) tels que $v = xuy$.

On dit qu'on mot $u = a_1 \dots a_n$ est *sous-mot* d'un mot v s'il existe une suite $v_0, v_1, \dots, v_n$ de mots (éventuellement vides) telle que $v = v_0 a_1 v_1 a_2 \dots a_n v_n$. Ainsi le mot *aba* est un sous-mot de *caccbac* mais n'est pas facteur de ce mot.

La longueur d'un mot u est notée $|u|$.

Langages.

On appelle *langage* tout sous-ensemble de A^*. Une *algèbre de Boole de langages* (sur A^*) est un ensemble $\mathfrak{B}$ de langages tel que :

i) $\varnothing \in \mathfrak{B}$.

ii) Si $L_1 \in \mathfrak{B}$ et $L_2 \in \mathfrak{B}$, alors $L_1 \cap L_2 \in \mathfrak{B}$.

iii) Si $L \in \mathfrak{B}$ alors $A^* \backslash L \in \mathfrak{B}$.

Automates.

On appelle automate sur l'alphabet A un quintuplet $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_0, F)$, où

Q est un ensemble fini, appelé ensemble des états,

δ est une application de $Q \times A$ dans Q,

q_0 est un élément de Q (l'état initial),

F est un sous-ensemble de Q (l'ensemble des états finaux).

L'application δ se prolonge en une application $(q, u) \to q \cdot u$ de $Q \times A^*$ dans Q en posant, pour tout $q \in Q$, $u \in A^*$ et $a \in A$, $q \cdot 1 = q$ et $q \cdot (ua) = \delta(q \cdot u, a)$.

Le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est le langage $L = \{ u \in A^* \mid q_0 \cdot u \in F \}$.

Idéaux.

Soit I un idéal d'un anneau et soit n un entier positif. On note I^n l'idéal engendré par les éléments de la forme $x_1 x_2 \dots x_n$, où $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des éléments de I.

I

1° Soit $\sim$ une congruence sur un monoïde M et soit $\pi : M \to M/\sim$ l'application canonique de M sur l'ensemble quotient $M/\sim$. Montrer qu'il existe une unique structure de monoïde sur $M/\sim$ telle que π soit un morphisme de monoïdes.

2° Soient $\sim_1$ et $\sim_2$ deux congruences sur un monoïde M telles que, pour tout x, y dans M, $x \sim_1 y$ entraîne $x \sim_2 y$. Démontrer qu'il existe un morphisme de monoïdes surjectif de $M/\sim_1$ sur $M/\sim_2$.

3° On dit qu'un langage L de A^* est reconnu par un monoïde M s'il existe un morphisme de monoïdes η de A^* dans M et une partie P de M telle que $L = \eta^{-1}(P)$.

a. Montrer que si M est quotient d'un monoïde N, N reconnaît également L (on pourra utiliser la propriété universelle de A^* pour construire un morphisme de monoïdes de A^* dans N).

b. Montrer que M reconnaît également le langage $A^* \backslash L$.

c. Montrer que si un monoïde M_1 (respectivement M_2) reconnaît un langage L_1 (respectivement L_2), le monoïde $M_1 \times M_2$ reconnaît $L_1 \cap L_2$.

4° Soit $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ un automate sur l'alphabet A et soit L le langage de A^* reconnu par $\mathcal{A}$. On note $\mathfrak{S}(Q)$ le monoïde des applications de Q dans lui-même muni de la loi de composition $(f, g) \to fg = g \circ f$. À chaque mot u de A^*, on associe l'application $\bar{u} \in \mathfrak{S}(Q)$ définie par $\bar{u}(q) = q.u$.

a. Montrer que l'application $u \to \bar{u}$ définit un morphisme de monoïdes de A^* dans $\mathfrak{S}(Q)$.

b. Montrer que $\mathfrak{S}(Q)$ reconnaît L.

5° Soit η un morphisme de monoïdes de A^* dans un monoïde fini M et soit P une partie de M. On pose $L = \eta^{-1}(P)$.

a. Montrer que l'automate $\mathcal{A} = (M, A, \delta, 1, P)$ — où δ est définie par $\delta(m, a) = m\eta(a)$ — reconnaît le langage L.

b. Montrer qu'un langage est rationnel (ou « régulier ») si, et seulement si, il est reconnu par un monoïde fini.

Tournez la page S. V. P.

AGREGATION de MATHEMATIQUES
OPTION Mathematiques de l'Informatique
1986
page 17

II

On donne ci-dessous l'en-tête et deux procédures du programme « sous-mots ».

```
program sous_mots (input, output);
const
    taille_max = 25;     (* taille maximum de l'alphabet *)
    long_max = 100;      (* longueur maximum des mots *)
type
    mot = array [1...long_max] of integer;
var
    k, m : integer;
    t : array [1...taille_max] of integer;
    u : mot;
    procedure entree;
var
    i : integer;
begin
    write ('Donnez le nombre de lettres de l''alphabet : ');
    readln(k);
    begin
        write('Donnez la longueur du mot : ');
        readln(m);
        for i := 1 to m do begin
            write('Donnez la lettre numero ', i, ' : a ');
            readln(u[i])
        end
    end
end;
procedure automate (k, m: integer; u: mot);
var
    i, j: integer;
begin
    writeln('L''ensemble des etats est (0,..., ', m + 1, ')');
    for j := 1 to k do begin
        writeln('delta(', m + 1, ', a ', j, ')= ', m + 1);
        writeln('delta(', m, ', a ', j, ')= ', m + 1);
        t[j] := m + 1
    end;
    for i := m - 1 downto 0 do
        for j := 1 to k do begin
            if j = u[i + 1] then
                t[j] := i + 1;
            writeln('delta(', i, ', a ', j, ')= ', t[j])
        end;
    writeln('L''etat initial est 0;');
    writeln('Tous les etats sauf ', m + 1, ' sont des etats finaux.')
end;
```

La procédure « entree » permet de fixer la taille k de l'alphabet, puis de donner un mot u sur l'alphabet $\{a_1, ..., a_k\}$ en précisant d'abord sa longueur m. Le mot u est représenté en fait par une suite finie d'entiers de l'ensemble $\{1, ..., k\}$. Ainsi, pour $k = 3$, le mot $a_1a_2a_2a_1$ est représenté par la suite 1,3,2,1. Dans la suite, on ne fera plus la distinction entre un mot et sa représentation par une suite d'entiers.

1° Donner sans démonstration le résultat de l'exécution de la procédure « automate » lorsque $k = 2$, $m = 4$ et lorsque u est le mot $a_1a_2a_1a_1$.

2° De façon générale, si u est un mot de longueur m sur l'alphabet $\{a_1, ..., a_k\}$, l'exécution de la procédure « automate » permet de définir un automate $\mathcal{A}(k, m, u) = (Q, A, \delta, q_0, F)$ où $Q = \{0,1, ..., m + 1\}$, $A = \{a_1, ..., a_k\}$, $q_0 = 0$, $F = \{0.1, ..., m\}$ et où δ est l'application « delta » décrite lors de l'exécution de la procédure.

a. Démontrer que pour tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant m$, et pour tout $a \in A$, $i + 1 \leqslant \delta(i, a) \leqslant \delta(i + 1, a)$.

b. On pose $u = b_1 ... b_m$ (où $b_1, ..., b_m \in A$). Démontrer que pour tout entier i tel que $0 \leqslant i < m$, $\delta(i, b_{i+1}) = i + 1$.

3° *a.* Démontrer que si i et j sont des entiers tels que $0 \leqslant i < j \leqslant m + 1$, alors $\delta(i, b_j) \leqslant j$.

b. Démontrer que l'automate $\mathcal{A}(k, m, u)$ reconnaît l'ensemble des sous-mots de u.

4° Calculer en fonction de k et de m le nombre d'exécutions de l'instruction « writeln » lors de l'exécution de la procédure « automate ».

III

Soit n un entier positif ou nul. On définit une relation $\leqslant_n$ sur A^* par $u \leqslant_n v$ si et seulement si tout sous-mot de longueur inférieure ou égale à n de u est sous-mot de v.

1° Montrer que $\leqslant_n$ est une relation de préordre. On notera $\sim_n$ la relation d'équivalence associée à $\leqslant_n$.

a. Montrer que $\sim_n$ est une congruence d'index fini sur A^*.

b. On suppose (pour cette question uniquement) que A est un alphabet de 2 lettres. Calculer l'index de $\sim_1$ et montrer que pour $n \geqslant 2$, l'index de $\sim_n$ est supérieur ou égal à 2^{n+1}.

2° Pour tout mot u, on pose $S(u) = \{v \in A^* \mid u \text{ est un sous-mot de } v\}$, et on note $\mathcal{J}_n$ l'algèbre de Boole engendrée par les langages $S(u)$ tels que $|u| \leqslant n$. Montrer qu'un langage L est dans $\mathcal{J}_n$ si et seulement si L est union de classes d'équivalence de $\sim_n$.

3° On dit qu'un monoïde M est ordonné s'il existe une relation d'ordre $\leqslant$ définie sur M et telle que :

pour tout $x \in M$, $x \leqslant 1$, et,

pour tout x, y, z dans M, $x \leqslant y$ entraîne $xz \leqslant yz$ et $zx \leqslant zy$.

a. Montrer que le monoïde $S_n(A) = A^*/\sim_n$ est ordonné.

b. Soit M un monoïde ordonné et soit η un morphisme de monoïdes surjectif de A^* dans M. On suppose que toute suite strictement décroissante d'éléments de M est de longueur inférieure ou égale à $n + 1$. Montrer que si $u \sim_n v$ alors $\eta(u) = \eta(v)$.

c. En déduire que M est quotient de $S_n(A)$ et que tout langage reconnu par M est élément de $\mathcal{J}_n$.

Tournez la page S. V. P.

IV

Soit M un monoïde. On définit une relation $\leqslant_J$ sur M en posant $x \leqslant_J y$ si, et seulement si, il existe des éléments s et t de M tels que $x = syt$. Le monoïde M est dit J-trivial si la relation $\leqslant_J$ est une relation d'ordre.

1° *a.* Montrer que dans tout monoïde M, $\leqslant_J$ est une relation de préordre mais pas nécessairement une relation d'ordre (on donnera un contre-exemple explicite).

b. Soit E un ensemble fini. Si R et S sont deux relations sur E, on définit une relation RS en posant, pour tout $x, y \in E$:

x RS y si, et seulement si, il existe $z \in E$ tel que x R z et z S y.

On note $\mathcal{R}(E)$ l'ensemble des relations réflexives sur E. Montrer que $\mathcal{R}(E)$, muni de la loi de composition (R,S) → RS, est un monoïde J-trivial.

c. Montrer qu'un monoïde ordonné est J-trivial.

d. Soit M l'ensemble de matrices à coefficients entiers suivant :

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Montrer que M muni de la multiplication usuelle des matrices est un monoïde J-trivial non ordonné.

2° Soit M un monoïde *fini*. Démontrer l'équivalence des conditions i), ii) et iii). (On pourra montrer successivement l'équivalence de i) et ii) puis celle de i) et iii).)

i) Il existe un entier n tel que, pour tout x, y dans M, $(xy)^n x = (xy)^n = y(xy)^n$.

ii) Il existe un entier n tel que, pour tout x, y dans M, $(xy)^n = (yx)^n$ et $x^n = x^{n+1}$.

iii) M est J-trivial.

3° Soit M un monoïde fini J-trivial.

a. Montrer que tout sous-monoïde et tout quotient de M sont également J-triviaux.

b. Montrer que le produit de deux monoïdes finis J-triviaux est J-trivial.

4° Soit M un monoïde fini J-trivial.

a. Montrer que M contient un élément minimum pour l'ordre $\leqslant_J$, qui sera noté 0. Vérifier que, pour tout $x \in M$, $0 \leqslant_J x \leqslant_J 1$ et $0x = 0 = x0$.

b. On note N(M) l'ensemble des éléments minimaux de $M \setminus \{0\}$ pour l'ordre $\leqslant_J$. Montrer que pour tout $n \in N(M)$, l'ensemble $M \setminus \{n\}$, muni de la loi de composition interne $*$ définie par

$$x * y = \begin{cases} xy & \text{si } xy \neq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un monoïde, que l'on notera M_n. Montrer que l'application π_n de M dans M_n, définie par $\pi_n(x) = x$ si $x \neq n$ et $\pi_n(n) = 0$, est un morphisme de monoïdes.

c. On suppose que $N(M) = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ avec $r \geqslant 2$. Montrer que l'application π de M dans $M_{n_1} \times M_{n_2} \times \ldots \times M_{n_r}$ définie par $\pi(m) = (\pi_{n_1}(m), \pi_{n_2}(m), \ldots, \pi_{n_r}(m))$ est un morphisme de monoïdes injectif.

5° Pour tout entier positif n, on note P(n) la propriété suivante :

« si M est un monoïde J-trivial tel que Card M ⩽ n, alors M est quotient d'un monoïde ordonné fini ».

On se propose d'établir P(n) par récurrence sur n. P(1) étant trivialement vérifiée, on suppose que P(n) est vraie pour un certain entier $n > 0$ et on considère un monoïde J-trivial M tel que Card M = $n + 1$.

a. Montrer que si Card N(M) ⩾ 2, M est quotient d'un monoïde ordonné fini.

b. On suppose désormais $N(M) = \{n\}$. Montrer que si $n^2 = n$, $M \setminus \{0\}$ est un sous-monoïde de M. En déduire que M est quotient d'un monoïde ordonné fini.

6° On suppose maintenant $n^2 \neq n$.

a. Démontrer que $n^2 = 0$.

b. Montrer qu'il existe un alphabet fini A, un monoïde ordonné fini T et des morphismes de monoïdes surjectifs, φ de A^* sur M, α de A^* sur T et β de T sur M_n, tels que $\pi_n \circ \varphi = \beta \circ \alpha$.

7° Soit $\leqslant_A$ la relation définie sur A^* par $u \leqslant_A v$ si et seulement si

(°) $\alpha(u) \leqslant \alpha(v)$, et

(°°) pour toute factorisation du type $u = u_0 a u_1$ avec $u_0 \in A^*$, $u_1 \in A^*$ et $a \in A \cup \{1\}$, il existe une factorisation du type $v = v_0 b v_1$ avec $v_0 \in A^*$, $v_1 \in A^*$ et $b = a$ ou $b = 1$, telle que :
$\alpha(u_0) \leqslant \alpha(v_0)$ et $\alpha(u_1) \leqslant \alpha(v_1)$

a. Établir que $\leqslant_A$ est une relation de préordre sur A^* et que pour tout mot u de A^*, $u \leqslant_A 1$.

b. Montrer que si u, v et w sont des mots tels que $u \leqslant_A v$, alors $uw \leqslant_A vw$ et $wu \leqslant_A wv$.

8° Soit $\sim_A$ la relation d'équivalence associée au préordre $\leqslant_A$.

a. Montrer que $\sim_A$ est une congruence d'index fini.

b. Montrer que pour tout $u, v \in A^*$, $u \sim_A v$ entraîne $\varphi(u) = \varphi(v)$.

c. En déduire que M est quotient d'un monoïde ordonné fini.

9° On note $\mathcal{J}$ la réunion des ensembles $\mathcal{J}_n$ définis au III-2°.

a. Vérifier que $\mathcal{J}$ est une algèbre de Boole.

b. Démontrer que, pour tout langage L, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) L est reconnu par un monoïde J-trivial fini.

ii) L est reconnu par un monoïde ordonné fini,

iii) $L \in \mathcal{J}$.

V

Soit k un corps commutatif et M un monoïde. On note $k[M]$ l'ensemble des sommes formelles de la forme $\alpha = \sum_{m \in M} \alpha_m m$, où $(\alpha_m)_{m \in M}$ est une famille presque nulle d'éléments de k (c'est-à-dire telle que $\alpha_m = 0$ sauf pour un nombre *fini* d'éléments de M). On admettra que $k[M]$, muni des trois opérations suivantes :

$$\sum_{m \in M} \alpha_m m + \sum_{m \in M} \beta_m m = \sum_{m \in M} (\alpha_m + \beta_m) m$$

$$\left(\sum_{m \in M} \alpha_m m\right)\left(\sum_{m \in M} \beta_m m\right) = \sum_{m \in M} \sum_{st = m} (\alpha_s \beta_t) m$$

$$\lambda \left(\sum_{m \in M} \alpha_m m\right) = \sum_{m \in M} (\lambda \alpha_m) m \text{ (où } \lambda \text{ désigne un élément de } k)$$

est une k-algèbre unitaire.

Étant donné deux mots u et v, on note $\binom{v}{u}$ le nombre de façons distinctes d'écrire u comme sous-mot de v. Plus formellement, si $u = a_1 \ldots a_n$,

$$\binom{v}{u} = \text{Card } \{(v_0, v_1, \ldots, v_n) \in A^* \times \ldots \times A^* \mid v = v_0 a_1 v_1 \ldots a_n v_n\}.$$

Par exemple, $\binom{abqab}{ab} = 3$ et $\binom{aabbaa}{aba} = 8$.

1° Soit a une lettre. Montrer que si n et m sont des entiers tels que $0 \leqslant m \leqslant n$, on a $\binom{a^n}{a^m} = \binom{n}{m}$.

Tournez la page S. V. P.

2° Soient u et v deux mots et soient a et b deux lettres. Établir les formules

$$(*)\quad \binom{va}{ub} = \binom{v}{ub} + \delta_{a,b}\binom{v}{u} \text{ où } \delta_{a,b} = 1 \text{ si } a = b \text{ et } \delta_{a,b} = 0 \text{ si } a \neq b.$$

$$(**)\quad \binom{v}{1} = 1.$$

$$(***)\quad \binom{1}{u} = 0 \text{ si } u \neq 1$$

et montrer que ces trois formules suffisent à déterminer $\binom{v}{u}$ pour tous les mots u et v.

3° On prend $M = A^*$. Dans ce cas, un élément de $k[A^*]$ est appelé polynôme en variables non commutatives à coefficients dans k. Montrer qu'il existe un unique automorphisme d'algèbre μ (respectivement σ) sur $k[A^*]$ tel que $\mu(a) = 1 + a$ (respectivement $\sigma(a) = 1 - a$) pour tout $a \in A$. Calculer $\mu(aba)$.

4° On prend $k = Q$, le corps des rationnels.

a. Vérifier que pour tout mot v

$$\mu(v) = \sum_{u \in A^*} \binom{v}{u} u$$

$$\sigma(v) = \sum_{u \in A^*} (-1)^{|u|} \binom{v}{u} u$$

b. En déduire que pour tous mots u, v, w

$$\binom{uv}{w} = \sum_{w_1 w_2 = w} \binom{u}{w_1}\binom{v}{w_2}$$

5° Soit p un nombre premier et w un mot. On définit une relation $\equiv_w$ sur A^* en posant $u \equiv_w v$ si, et seulement si, pour tout facteur x de w, $\binom{u}{x} \equiv \binom{v}{x} \bmod p$.

a. Montrer que $\equiv_w$ est une congruence d'index fini sur A^*.

b. Montrer que pour tout mot u, $u^{p^{|w|}} \equiv_w 1$.

c. En déduire que le monoïde quotient $A^*/\equiv_w$ est un p-groupe (c'est-à-dire un groupe fini dont l'ordre est une puissance de p).

6° Soit w un mot et soit i un entier tel que $0 \leqslant i < p$. On pose

$$L_{w,i} = \left\{ v \in A^* \mid \binom{v}{w} \equiv i \bmod p \right\}$$

a. Montrer que $L_{w,i}$ est union de classes d'équivalence de la congruence $\equiv_w$.

b. En déduire que $L_{w,i}$ est reconnu par un p-groupe.

c. Soit $\mathcal{G}_p$ l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_{w,i}$ (où $w \in A^*$ et $0 \leqslant i < p$). Montrer que si $L \in \mathcal{G}_p$, alors L est reconnu par un p-groupe.

7° Soit n un entier positif ou nul. On définit une relation $\equiv_n$ sur A^* en posant $u \equiv_n v$ si et seulement si $u \equiv_w v$ pour tout mot w tel que $|w| \leqslant n$.

a. Montrer que $\equiv_n$ est une congruence et que le monoïde quotient $G_n = A^*/\equiv_n$ est un p-groupe.

b. Décrire G_0 et G_1.

8° Soit l'ensemble des éléments $\alpha = \sum_{u \in A^*} \alpha_u u$ de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\,[A^*]$ tels que $\sum_{u \in A^*} \alpha_u = 0$.

a. Montrer que I est un idéal engendré par les éléments de la forme $(1 - a)$ avec $a \in A$.

b. En déduire que $\sigma(I^{n+1})$ est l'idéal engendré par les éléments de la forme w où $|w| > n$.

c. Soient u et v deux mots. Montrer que $u \equiv_n v$ si et seulement si $u - v \in I^{n+1}$.

9° Soit G un p-groupe non trivial.

a. Démontrer qu'il existe un élément x de G, différent de 1, tel que $x^p = 1$ et tel que, pour tout $g \in G$, $xg = gx$.

b. Soit G' le sous-groupe de G engendré par x et soit $H = G/G'$. On note γ l'homomorphisme de groupe canonique de G sur H. Montrer que γ se prolonge de façon unique en un homomorphisme d'algèbre de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[G]$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[H]$.

c. On pose $K = \gamma^{-1}(0)$. Montrer que K est égal à l'idéal engendré par $(1 - x)$.

d. Montrer que $(1 - x)^p = 0$ et en déduire que $K^p = 0$.

10° Soit I_G (respectivement I_H) l'idéal de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[G]$ (respectivement de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[H]$) engendré par les éléments de la forme $1 - g$ où $g \in G$ (respectivement $g \in H$).

a. Montrer que $\gamma(I_G) = I_H$.

b. Montrer par récurrence sur r que si G est un p-groupe d'ordre p^r, alors $I_G^{p^r} = 0$.

11° Soit G un p-groupe d'ordre p^r et soit η un morphisme de monoïdes surjectif de A^* dans G. On pose $n = p^r - 1$.

a. Montrer que si $u \equiv_n v$, alors $\eta(u) = \eta(v)$.

b. En déduire que G est quotient de G_n.

12° Soit L un langage de A^* reconnu par un p-groupe.

a. Montrer qu'il existe un entier positif n tel que G_n reconnaisse L.

b. En déduire que $L \in \mathcal{G}_p$ si et seulement si L est reconnu par un p-groupe.